Une variante d'un résultat de Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann

Jean-Loup Waldspurger

▶ To cite this version:

Jean-Loup Waldspurger. Une variante d'un résultat de Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann. 2009. hal-00430588

HAL Id: hal-00430588
https://hal.science/hal-00430588

Preprint submitted on 9 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une variante d'un résultat de Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann

J.-L. Waldspurger

28 octobre 2009

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, W un espace vectoriel sur F de dimension finie ≥ 1, $< .,. >$ une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée sur W, $W = V \oplus U$ une décomposition orthogonale où U est une droite. On note M, resp. G, le groupe orthogonal de W, resp. V, et M^0, resp. G^0, le sous-groupe spécial orthogonal (plus exactement, on note ainsi les groupes de points sur F de ces groupes algébriques). Le groupe G s'identifie au sous-groupe des éléments de M qui fixent U point par point. On veut prouver

Théorème 1. *Soient π, resp. ρ, une représentation admissible irréductible de M^0, resp. G^0. Alors $dim_{\mathbb{C}}(Hom_{G^0}(\pi_{|G^0}, \rho)) \leq 1$.*

Dans l'article [AGRS], les auteurs démontrent plusieurs résultats de ce genre et en particulier l'analogue du théorème ci-dessus où les groupes spéciaux orthogonaux sont remplacés par les groupes orthogonaux. Le cas des groupes spéciaux orthogonaux a une certaine importance, en particulier si l'on s'intéresse à la conjecture locale de Gross-Prasad. La preuve du théorème 1 que l'on présente ci-dessous est une simple variante de celle de [AGRS]. On n'en détaillera que les parties qui diffèrent sensiblement de celle-là. Je remercie vivement G. Henniart pour m'avoir signalé le problème et pour des remarques pertinentes sur une première version de l'article.

On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G^0. Posons $\tilde{G} = G \times \{\pm 1\}$. Ce groupe agit sur G^0, $\mathfrak{g}$ et V par

$$(g,\epsilon)x = gx^{\epsilon}g^{-1},\ (g,\epsilon)X = \epsilon gXg^{-1},\ (g,\epsilon)v = \epsilon gv,$$

pour $(g,\epsilon) \in \tilde{G}$, $x \in G^0$, $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. On a $\tilde{G} \subset \tilde{M}$ et, par cette inclusion, $\tilde{G}$ agit sur M^0. Posons $e(V) = [\frac{dim(V)+1}{2}]$, que l'on considère comme un élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Notons $\bar{G}$ le sous-groupe des éléments $(g,\epsilon) \in \tilde{G}$ tels que $det(g) = \epsilon^{e(V)}$. Notons χ le caractère $(g,\epsilon) \mapsto \epsilon$ de $\bar{G}$ et, pour tout espace $\mathcal{S}$ sur lequel $\bar{G}$ agit, notons $\mathcal{S}^{\bar{G},\chi}$ le sous-espace des éléments qui se transforment sous l'action de $\bar{G}$ selon le caractère χ. Pour tout espace topologique raisonnable X, on note $\mathcal{S}(X)$ l'espace des fonctions sur X à valeurs complexes, localement constantes et à support compact, et $\mathcal{S}'(X)$ son dual. On a

Théorème 1'. *L'espace $\mathcal{S}'(M^0)^{\bar{G},\chi}$ est nul.*

Prouvons que ce théorème entraîne le théorème 1. On fixe $g \in G$ tel que $det(g) = (-1)^{e(V)}$. On note σ l'antiinvolution $x \mapsto gx^{-1}g^{-1}$ de M^0. Le théorème 1' implique que toute distribution sur M^0 invariante par conjugaison par G^0 est invariante par σ. Le corollaire 1.1 de [AGRS] s'applique : pour π et ρ comme dans le théorème 1, on a

$$dim_{\mathbb{C}}(Hom_{G^0}(\pi_{|G^0},\rho^*)dim_{\mathbb{C}}(Hom_{G^0}((\pi^*)_{|G^0},\rho))\leq 1.$$

Il reste à prouver que

$$(1)\qquad Hom_{G^0}(\pi_{|G^0},\rho^*)\simeq Hom_{G^0}(\pi_{|G^0},\rho)\simeq Hom_{G^0}((\pi^*)_{|G^0},\rho).$$

Fixons $\delta\in G$ tel que $det(\delta)=-1$. On définit $\pi^\delta(x)=\pi(\delta x\delta^{-1})$. Si $dim(W)$ est impaire, on a $\pi^*\simeq\pi\simeq\pi^\delta$. Si $dim(W)$ est paire, on a $\pi^*\simeq\pi$ ou $\pi^*\simeq\pi^\delta$. De même en remplaçant W et π par V et ρ. On a aussi

$$Hom_{G^0}(\pi^\delta_{|G^0},\rho^\delta)=Hom_{G^0}(\pi_{|G^0},\rho).$$

La relation (1) s'ensuit. □

Prouvons le théorème 1'. On a :

Proposition. *Supposons que $\mathcal{S}'(M^0\times W)^{\bar{M},\chi}=\{0\}$. Alors $\mathcal{S}'(M^0)^{\bar{G},\chi}=\{0\}$.*

Preuve. Comme dans [AGRS] prop. 4.1, on fixe $e\in U$ non nul. Par descente de Frobenius, l'hypothèse implique que $\mathcal{S}'(M^0)^{\bar{M}_e,\chi}=\{0\}$, où $\bar{M}_e$ est le fixateur de e dans $\bar{M}$. Ce fixateur est l'ensemble des $(m,\epsilon)\in\bar{M}$ tels que $m=g\oplus\epsilon$ conformément à la décomposition $W=V\oplus U$, avec $g\in G$. En introduisant l'élément central ϵ_M dans M, on a aussi $m=\epsilon_M(g\oplus 1)$, avec un autre g. La condition $(m,\epsilon)\in\bar{M}$ signifie que $det(g)=\epsilon^{dim(W)+e(W)}$. Or $dim(W)+e(W)\equiv e(V)\ mod\ 2\mathbb{Z}$. Donc $\bar{M}_e$ est l'ensemble des $(\epsilon_M,1)(g,\epsilon)$, avec $(g,\epsilon)\in\bar{G}$. Puisque $(\epsilon_M,1)$ agit trivialement sur M^0, on en déduit $\mathcal{S}'(M^0)^{\bar{G},\chi}=\{0\}$. □

Désormais, on oublie M et W et on va prouver $\mathcal{S}'(G^0\times V)^{\bar{G},\chi}=\{0\}$. On prouve simultanément $\mathcal{S}'(\mathfrak{g}\times V)^{\bar{G},\chi}=\{0\}$. On raisonne par récurrence sur $d=dim(V)$. On le vérifie immédiatement pour $d=1$. Pour $d=2$, l'action de $\bar{G}$ sur G^0 est triviale. On doit montrer que $\mathcal{S}'(V)^{\bar{G},\chi}=\{0\}$. L'action respecte la forme quadratique. Sur l'ouvert $\mathcal{V}$ des éléments v tels que $<v,v>\neq 0$, les orbites pour $\bar{G}$ sont les mêmes que pour G^0. On en déduit aisément $\mathcal{S}'(\mathcal{V})^{\bar{G},\chi}=\{0\}$. Reste l'ensemble Γ des éléments v tels que $<v,v>=0$. Si la forme quadratique est anisotrope, il est réduit au point 0 et le résultat est clair. Sinon, dans une base convenable, c'est l'ensemble des (x,y) tels que $xy=0$. Sur $\Gamma\setminus\{0\}$, on voit qu'un élément $T\in\mathcal{S}'(V)^{\bar{G},\chi}$ est forcément multiple de la distribution

$$f\mapsto\int_{F^\times}f(x,0)d^*x-\int_{F^\times}f(0,y)d^*y,$$

avec des mesures de Haar pour la multiplication. Or cette distribution ne se prolonge pas à V tout entier en une distribution G^0-invariante (c'est l'exemple donné dans l'introduction de [AGRS]). Donc T est nulle sur $\Gamma\setminus\{0\}$. Et, comme précédemment, T ne peut pas avoir pour support le seul point 0. Donc $T=0$. Désormais, on suppose $d\geq 3$, donc le centre Z de G^0 a au plus deux éléments.

Lemme. *Soit $T\in\mathcal{S}'(G^0\times V)^{\bar{G},\chi}$, resp. $T\in\mathcal{S}'(\mathfrak{g}\times V)^{\bar{G},\chi}$. Alors le support de T est contenu dans $Z\mathcal{U}\times V$, resp $\mathcal{N}\times V$.*

Cf. [AGRS], lemme 4.1 dont on utilise les notations. Soit $a \in G^0$ semi-simple non central. On peut décomposer V en somme orthogonale $V = V_+ \oplus V_- \oplus \oplus_{i\in I} V_i$. Pour tout $i \in I$, on a une suite d'extensions $F_i/F_{\pm i}/F$, où $[F_i : F_{\pm i}] = 2$. On admet formellement le cas où $F_i/F_{\pm i}$ est "déployée", c'est-à-dire $F_i = F_{\pm i} \oplus F_{\pm i}$. L'espace V_i a une structure de F_i-espace vectoriel et est muni d'une forme hermitienne non dégénérée. L'élément a agit par multiplication par 1 sur V_+, -1 sur V_- et a_i sur V_i, où a_i est un élément de $F_i^\times$ tel que $a_i \neq \pm 1$ et $Norm_{F_i/F_{\pm i}}(a_i) = 1$. La composante neutre du commutant de a dans G^0 est $G^0_+ \times G^0_- \times \prod_{i\in I} G_i$, où les G_i sont des groupes unitaires (en un sens approprié si $F_i = F_{\pm i} \oplus F_{\pm i}$). Les éléments de G^0 de partie semi-simple a sont produits de a et d'éléments de ce groupe. L'argument de [AGRS] nous ramène à construire un élément $(g, -1) \in \bar{G}$, fixant a, et vérifiant la propriété suivante. Considèrons $T_+ \in \mathcal{S}'(G^0_+ \times V_+)^{G^0_+}$, $T_- \in \mathcal{S}'(G^0_- \times V_-)^{G^0_-}$ et, pour tout $i \in I$, $T_i \in \mathcal{S}'(G_i \times V_i)^{G_i}$. Alors $T = T_+ \otimes T_- \otimes \otimes_{i\in I} T_i$ est fixe par l'action de $(g, -1)$. On prend $g_+ \in G_+$ tel que $(g_+, -1) \in \bar{G}_+$, $g_- \in G_-$ tel que $(g_-, -1) \in \bar{G}_-$ et, pour tout $i \in I$, un automorphisme antilinéaire de V_i (relativement à l'extension $F_i/F_{\pm i}$) préservant la forme hermitienne. On prend $g = g_+ \times g_- \times \prod_{i\in I} g_i$. D'après les résultats de [AGRS] pour les groupes unitaires ou linéaires, et d'après l'hypothèse de récurrence, l'élément $(g, -1)$ fixe T. Il fixe a. Il suffit de vérifier que $(g, -1)$ appartient à $\bar{G}$. Pour tout $i \in I$, $dim_F(V_i)$ est paire et $det(g_i) = (-1)^{dim_F(V_i)/2}$. Parce que $a \in G^0$, $dim(V_-)$ est paire et $det(g_-) = (-1)^{e(V_-)} = (-1)^{dim(V_-)/2}$. On a $det(g_+) = (-1)^{e(V_+)}$. Donc $det(g) = (-1)^e$, où $e = e(V_+) + \frac{dim(V)-dim(V_+)}{2}$. Or $e \equiv e(V)\ mod\ 2\mathbb{Z}$. $\square$

Tout élément de Z étant invariant par $\bar{G}$, on est ramené aux distributions sur $\mathcal{U} \times V$, que l'on descend par l'application de Cayley aux distributions sur $\mathcal{N} \times V$. Cela nous ramène au problème sur l'algèbre de Lie.

Lemme. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G},\chi}$. Alors le support de T est contenu dans $\mathfrak{g} \times \Gamma$.*

Cf. [AGRS] prop. 4.2. On fixe $v \in V$ avec $< v, v > \neq 0$, on va montrer que $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})^{\bar{G}_v,\chi} = \{0\}$, où $\bar{G}_v$ est le fixateur de v. Comme dans la preuve de : théorème 1' implique théorème 1, $\bar{G}_v$ est l'ensemble des $(\epsilon_G, 1)(g_1, \epsilon)$, avec $(g_1, \epsilon) \in \bar{G}_1$, où on a écrit $V = V_1 \oplus Fv$. De nouveau, l'élément $(\epsilon_G, 1)$ agit trivialement sur $\mathfrak{g}$, on peut le supprimer. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus V_1$ et l'action de $\bar{G}_1$ par restriction de celle de $\bar{G}$ est "la bonne". $\square$

On utilise maintenant l'argument de [AGRS] lemme 3.3 et remarque avant le lemme 3.4. Munissons $\mathfrak{g}$ de la forme bilinéaire symétrique $(X, Y) \mapsto trace(XY)$. On définit deux transformations de Fourier partielles $T \mapsto \mathcal{F}_\mathfrak{g} T$ et $T \mapsto \mathcal{F}_V T$, la première sur la variable dans $\mathfrak{g}$ (relativement à la forme ci-dessus), la seconde sur la variable dans V, relativement à la forme $< ., . >$. Elles conservent l'espace $\mathcal{S}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G},\chi}$. On a aussi deux représentations de Weil du groupe métaplectique $\tilde{SL}_2$. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathfrak{g} \times V)^{\bar{G},\chi}$. Alors T est à support dans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{F}_\mathfrak{g} T$ l'est aussi. Donc T est invariante par la première représentation de Weil. De même, T est invariante par la seconde représentation de Weil. En dimension impaire, une représentation de Weil ne se descend pas au groupe SL_2, l'élément du noyau de la projection de $\tilde{SL}_2$ sur SL_2 agit par multiplication par -1 et tout invariant est nul. Donc T est nulle si $dim(\mathfrak{g})$ est impaire ou si $dim(V)$ est impaire. On a posé $d = dim(V)$. On a $dim(\mathfrak{g}) = d(d-1)/2$. Donc T est nulle si d est impaire ou si $d \equiv 2\ mod\ 4\mathbb{Z}$. On suppose maintenant $d \equiv 0\ mod\ 4\mathbb{Z}$. On utilise la preuve de [AGRS] paragraphe 5. Elle montre que le support de nos distributions est contenu dans l'ensemble des (X, v), $X \in \mathcal{N}$ et $v \in Q(X)$. Elle montre aussi qu'il suffit de fixer X nilpotent et, en notant $\bar{G}_X$ son fixateur, de prouver le lemme suivant. On note $T \mapsto \hat{T}$ la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(V)$, similaire à $T \mapsto \mathcal{F}_V(T)$.

Lemme. *On suppose $d \equiv 0 \ mod \ 4\mathbb{Z}$. Soit $T \in \mathcal{S}'(V)^{\bar{G}_X,\chi}$. Supposons T et $\hat{T}$ à support dans $Q(X)$. Alors $T = 0$.*

Pour démontrer cette assertion, on doit se débarrasser de l'hypothèse sur d. On définit le sous-groupe $\underline{G} \subset \tilde{G}$ formé des $(g, \epsilon) \in \tilde{G}$ tels que $det(g) = \epsilon^d$. Remarquons que $\underline{G} = \bar{G}$ si $d \equiv 0 \ mod \ 4\mathbb{Z}$. Le lemme se généralise sous la forme

Lemme. *Soit $T \in \mathcal{S}'(V)^{\underline{G}_X,\chi}$. Supposons T et $\hat{T}$ à support dans $Q(X)$. Alors $T = 0$.*

Preuve. Le lemme 5.3 de [AGRS] reste valable, en remarquant que, pour des décompositions $V = V_1 \oplus V_2$, $X = X_1 \oplus X_2$, si $(g_1, -1) \in \underline{G}_{1,X_1}$ et $(g_2, -1) \in \underline{G}_{2,X_2}$, alors $(g_1 g_2, -1)$ appartient à $\underline{G}_X$. Cela nous ramène au cas où le couple (V, X) est de l'un des types suivants.

1^{er} cas. d est impair, V est muni d'une base $(e_i)_{i=1,\dots,d}$, avec $< e_i, e_j >= \nu(-1)^i \delta_{i,d+1-j}$ où ν est une constante non nulle, $Xe_i = e_{i-1}$ pour $i \geq 2$, $Xe_1 = 0$. On décompose $V = V_1 \oplus V_0 \oplus V_2$, où V_1 est engendré par les e_i pour $i \leq (d-1)/2$, V_0 est la droite portée par $e_{(d+1)/2}$ et V_2 est engendré par les e_i pour $i \geq (d+3)/2$. Introduisons l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(V) & \to & \mathcal{S}(V_0) \\ f & \mapsto & f_0 \end{array}$$

définie par

$$f_0(v_0) = \int_{V_1} f(v_1 + v_0) dv_1.$$

Dans [AGRS], les auteurs prouvent qu'il existe $R \in \mathcal{S}'(V_0)$ telle que $T(f) = R(f_0)$ pour tout $f \in \mathcal{S}(V)$. Il y a un élément $a \in G^0$, appartenant au tore diagonal, tel que $aXa^{-1} = -X$. Posons $g = -a$. On a $(g, -1) \in \underline{G}_X$. Faisons agir trivialement cet élément sur V_0. L'application ci-dessus est alors équivariante pour l'action de $(g, -1)$. Donc T est invariante par cet élément.

$2^{ème}$ cas. $d \equiv 0 \ mod \ 4\mathbb{Z}$, V est muni d'une base $(e_i)_{i=1,\dots,d/2} \cup (f_i)_{i=1,\dots,d/2}$, chaque sous-famille engendrant des lagrangiens, on a $< e_i, f_j >= (-1)^i \delta_{i,d/2+1-i}$, $Xe_i = e_{i-1}$, $Xf_i = f_{i-1}$ pour $i \geq 2$ et $Xe_1 = Xf_1 = 0$. On décompose $V = V_1 \oplus V_2$, où V_1 est engendré par les e_i et f_i pour $i \leq d/4$ et V_2 est engendré par les e_i et f_i pour $i \geq d/4+1$. Dans [AGRS], les auteurs prouvent que T est multiple de la distribution

$$f \mapsto \int_{V_1} f(v_1) dv_1.$$

Il y a un élément $g \in G^0$, appartenant au tore diagonal, tel que $gXg^{-1} = -X$. L'élément $(g, -1)$ appartient à $\underline{G}_X$ et fixe la distribution ci-dessus. Donc T est invariante par cet élément. $\square$

Remarque. Dans [AGRS], les auteurs considèrent aussi le deuxième cas avec $d \equiv 2 \ mod \ 4\mathbb{Z}$. C'est inutile. Par un changement de base (remplacer e_i et f_i par $e_i + f_i$ et $e_i - f_i$), ce cas se ramène à une somme orthogonale de deux couples du premier cas.

Cela achève la preuve du théorème 1'.

Remarque. On a supposé la caractéristique de F nulle. Selon un travail récent de Henniart, la démonstration doit s'étendre au cas où la caractéristique de F est différente de 2.

Référence

[AGRS] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis, G. Schiffmann : *Multiplicity one theorems*, arXiv 07094215v1, mathRT

Institut de mathématiques de Jussieu-CNRS
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
e-mail : waldspur@math.jussieu.fr